计算机开始学会了像人那样解决几何问题。

莱布尼兹、希尔伯特这些关心过几何推理的科学大师都有可能顺手发现消点方法。但它就像一颗埋在泥土中的珍珠，一直被忽视了两千多年。我们是幸运的。

这一突破使几何问题机械求解的研究进入了能够在实际中应用的新阶段。从 1992 年至 1995 年，我们进一步推广了几何问题可读解答机械化的方法和适用范围。实现了立体几何问题求解的体积方法[16]，几何定理可读证明自动生成的向量法、复数法[17]和全角法[18]，建立了能自动生成传统风格解答的几何信息搜索系统[29]。这样，几何解题软件推向市场的条件已经成熟了。

计算机开始学会了像人那样解决几何问题。

前面提到，人们曾用计算机证明了数以百计的困难的几何定理。这些定理是从多种书刊上搜集来的，是数学家早已证明了的。那么，能不能用计算机发现新的几何定理呢？

起初，有些研究报告称，用计算机发现了新的几何定理。但不久就查出来，这些定理在文献中早有记载。欧氏几何历史太悠久了，文献浩如烟海，想找出一条漂亮的新定理，确实是困难的。

相比之下，非欧几何历史短得多，定理的证明也难得多。用计算机发现非欧几何的新定理，该是大有可为的吧！

1993 年，我们（杨路、高小山、周咸青和作者）把消点法推广到了非欧几何，用计算机发现了几十条非欧几何的新定理，并且自动生成了它们的可读证明[26]。

1996 年后，李洪波博士、王东明博士发展了不变量方法，把消点法推广到了广义的向量空间，即 Clifford 代

能不能用计算机发现新的几何定理呢?

数[22,24]。

1997 年,吉林大学的张树国教授和杨海圈博士又把消点法推广,对一批关于圆锥曲线定理,用计算机自动生成了其可读证明[31]。

几何问题,通常包括证明、计算、公式推导和作图。用消点法和几何信息搜索系统做证明题、计算题和公式推导是方便的。几何作图又如何呢?

事实上,作图、证明、计算和公式推导是相通的。对一个作图题,假定图已经作好了,再对图中的几何信息进行搜索推导,往往能发现作图的方法。这样,又开辟了几何作图机械化的一条道路[19]。

计算机自动生成几何问题可读解答的困难,被成功地突破了。

6.4 不等式的机器证明

1985 年,吴文俊院士在上海的一个全国性学术会议上作了关于几何定理机器证明的报告。当谈到几何不等式的机器证明时,他只说了一句话:“一大难题”。

1996 年以来,关于这“一大难题”的研究,也有了重要的进展。

不等式证明机械化的困难之一,在于实代数的一个最基本的问题长期没有解决。这就是多项式的判别系统问题。

根据实系数一元二次方程的判别式是正是负还是零,可以断定它有没有实根,两个实根是否相同。这是代数学的经

不等式证明机械化的困难之一，在于实代数的一个最基本的问题长期没有解决。这就是多项式的判别系统问题。

典结果，也是中学生数学课的重要内容。

对高于二次的多项式，情形更为复杂，要用一组不等式或等式才能说清楚根的状态。这样的一组等式或不等式，如果有的话，就叫做该多项式的判别系统。

为什么说不等式的机器证明与判别系统密切相关呢？

因为，即使最简单的不等式问题，也可能涉及判别系统。例如，要问不等式

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 > 0$$

在 a,b,c 满足什么条件时对一切实数 x 成立，就等价于问这个 5 次多项式何时无实根。这是判别系统所要回答的问题之一。

16 世纪，数学家发现了 3 次和 4 次方程的求根公式。在此基础上，建立了实系数 3 次和 4 次方程的判别系统。顺便提一句，实系数 4 次方程的完全判别系统，是 20 世纪 60 年代才建立起来的。

5 次或更高次的文字系数多项式，就没有求根公式了。有没有判别系统？如何找寻它的判别系统？这是实代数领域长期未能解决的一个基本问题。

这个问题不解决，大量的几何不等式问题，代数不等式问题，以及许多科技领域与不等式有关的问题就无法从一般的推理角度来解决。

熟知的斯笃姆法则，处理的是数值系数代数方程的实根问题。而在一般的推理过程中，往往要问系数满足什么条件时有实根。这就需要对文字系数的代数方程建立判别式系统。

杨路、侯晓荣和曾振柄提出了对任意次的实系数代数方程建立完全判别系统的通用算法，使这个实代数的基本问题得到了完满的回答。

方程的次数越高，判别式系统就越复杂。特别是，5 次和更高次的方程没有求根公式，这使问题更难下手。直到 1995 年，4 次方程的判别式系统已经建立 30 多年了，关于实系数 5 次代数方程根的完全分类的显式判准问题，即判别式系统问题，还未解决。

计算机自动推理促进了这一古典课题的研究。1996 年，杨路、侯晓荣和曾振柄提出了对任意次的实系数代数方程建立完全判别系统的通用算法，使这个实代数的基本问题得到了完满的回答[27]。用他们提供的 MAPLE 程序，在微机上很容易求出直到 8 次的代数方程的判别系统。如果允许用不展开的行列式表示判别系统中的多项式，还可以求出次数高得多的代数方程的判别系统。在此基础之上，梁松新用作者提出的想法，在他的博士论文中又解决了任意次数的复系数多项式判别系统问题[22]。

实系数代数方程的根分类的类数，随次数的增加而迅速膨胀。2 次方程只有 3 种情形，3 次方程只有 4 种。4 次 9 种，5 次 12 种，6 次 23 种，7 次 31 种，8 次 54 种，9 次 73 种，10 次竟有 118 种之多。复系数的情形更复杂，从 3 次到 10 次的根分类数顺次为：12，27，50，98，172，310，522，888！

如此复杂的情形，即使求出了判别系统中的每个（以系数为变元）多项式，要把这些多项式所满足的不等式条件和根分类的各种情形一一对应起来，所要进行的逻辑分析也是繁琐可怕的。在文献[22]中用计算机自动推理的方法解决了这个问题。现在只要在计算机上装有数学软件 MAPLE 和该文献所说的程序（本书所附的光盘上有此程序），任意输

1998 年，杨路发表的一篇论文中提出了不等式机器证明的降维算法与通用程序。

入一个多项式，计算机会自动给出该多项式的完全的根分类表，包括每类所对应的系数之间的条件，绝不需要人工干预。

这是几何问题机器求解研究带来的有价值的副产品。

代数方程的判别系统的研究进展为不等式的研究提供了基础。但是，几何不等式机器证明的研究仍要克服它本身固有的困难。

1998 年，杨路发表的一篇论文中提出了不等式机器证明的降维算法与通用程序[28]，使这一难题得到突破。

不等式机器证明的困难除了依赖于实代数的自动推理外，还因为其复杂度随维数增加而急速升高。当命题的假设中含有若干代数方程时，一个自然的想法是消去一些变元以降低维数。这样做所遭遇的新的困难是，必须有效处理带参数的根式。例如，几何不等式常常涉及几个线段长度之和，用坐标处理化成代数表示，是几个根式的和。如何化去根号呢？国内外常用的办法是引进新的变元和方程，这使问题的维数升高而复杂化，常常超出计算机的能力。

杨路的降维算法正是一个既能将维数保持在最低限度，又能有效地将含参根式有理化的方法[28]。如果你想领略一下他的高招儿，可仔细看看这段说明。

****

注释

所用基本概念如下：

［定义 1］ 给定一个以 x,y,z 等为变量的代数不等式 F，我们说 $L(T)$ 是 F 的一个左多项式，如果 $L(T)$ 是 T 的多项式，而它所有系数都是 x,y,z 等的多项式，且 F 的左边是

降维算法正是一个既能将维数保持在最低限度，又能有效地将含参根式有理化的方法。

$L(T)$的一个根。类似地可以定义 F 的右多项式$R(T)$。

［定义 2］ 以 $P(x,y,z,\cdots)$表示 $L(T)$与 $R(T)$关于 T 的结式，并将 $P(x,y,z,\cdots)=0$ 定义的曲面叫做 F 的临界曲面。

下面是算法的梗概：

① 确定所要验证的不等式的临界曲面。

② 临界曲面将参数空间剖分为有限个部分，在每一部分任意选定至少一个测试点。

③ 只须对这有限个测试点验证该不等式。如果对这些特殊的参数值命题为真，则命题普遍真。

* *

根据以上算法，杨路用 MAPLE 语言编制成的通用程序 BOTTEMA 已在 PC 机上成功地验证了 1 000 多个不等式，其中近半数是近期提出未加证实的猜想。对名著《几何不等式》中 120 个基本不等式的验证总共费时仅 20 多秒。运用该软件已能成批验证非平凡的不等式。就两个自由度的情形，其效率与等式型几何定理证明软件相比已在伯仲之间。

6.5 研究展望和应用前景

这 20 年，计算机解几何问题的本领有了飞跃的提高。像用机器生成人能理解的证明或题解，20 年前是不可想象的。

但是，机器生成可读证明的实现并不使代数方法失去价值。一些几何问题仍需用代数方法。非线性代数方程组的

机器生成可读证明的实现并不使代数方法失去价值。一些几何问题仍需用代数方法。

理论有广泛应用,是自动推理的一大热点。道高一尺,魔高一丈,更难的问题要求发展更有力的新方法。发展非线性代数方程组的并行插值求解方法,综合不同方法的长处以建立有效的人机交互求解系统,都是极有希望的研究方向。

另一方面,由于实系数多项式完全判别式系统的发现,以及进一步几何不等式机器证明的难题得到突破。几何不等式和几何作图的机器求解,以及微分几何、微分方程的机器求解,会随着实代数研究的进展而出现新的局面。

关于不变量方法的研究,消点法仍有改进和发展的余地。一方面可以使用更多的几何不变量,把消点法的应用范围扩大,使它能用于更多的命题和更多种的几何。多种不变量的综合运用,如角度和长度的综合,是这一研究的难点。另一方面,由于基本的几何对象除点外还有直线和平面等,所以由消点可以发展到消线、消面、消圆。方法的多样化可以提高证明的质量,并使证明丰富多彩。消点法不但能证明几何定理,也可用来做几何计算和公式推导,多数情形下用笔和纸也可以有效地进行。人用消点法解题,还可以灵活一点,如何发展适于人工执行的或人机交互的消点方法,值得研究。

传统求解自动生成的研究,会进入实用阶段。前推搜索方法能使几何定理的证明更为传统化,还能搜索出所给几何图形的许多性质,这是几何定理机器求解的其他方法难以做到的。前后推搜索联合使用,有可能提高效率。在此基础上研究几何问题机器求解的其他方法,这一方向具有诱人的前景。高智能的传统几何解题方法的机械化,如辅助线、几何